

Cel ćwiczenia:

1. Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego
2. Porównanie otrzymanego wyniku z wartością tablicową

Zagadnienia do przygotowania:

- prawo powszechnego ciążenia
- wahadło matematyczne, okres drgań wahadła
- prawo Hooke'a
- ruch harmoniczny, równanie ruchu, okres drgań

Przebieg ćwiczenia:

1. Wypoziomować zestaw pomiarowy.
2. Zmierzyć długość nici wahadła, l_0 , oraz średnicę kulki $2r$. Oszacować niepewności pomiaru Δl_0 , Δr .
3. Odchylić kulkę od położenia równowagi o kąt 10° i obserwować czy wychylenia są w płaszczyźnie równoległej do powierzchni skali kątovej.
4. Zmierzyć czas trwania 10 okresów. Pomiary przeprowadzić trzykrotnie.
5. Przeprowadzić analogiczne pomiary dla kulki wychylonej od położenia równowagi o kąt 5° , 15° i 20° .
6. Zmieniać ok. 6 razy długość nici wahadła, l , i dla wychylenia o ten sam kąt ok. 15° odczytać trzykrotnie czas trwania 10 okresów.

Opracowanie wyników:

1. Sporządzić wykres zależności kwadratu czasu trwania 1 okresu od długości wahadła $T^2(l)$.
2. Obliczyć metodą regresji liniowej współczynnik nachylenia prostej, a , oraz błąd współczynnika nachylenia, S_a .
3. Odczytać z wykresu współczynnik nachylenia prostej, a_{rys} , i porównać z wartością obliczoną, a .
4. Obliczyć przyspieszenie ziemskie g oraz błąd Δg z zależności $T^2(l)$
$$g = 4\pi^2 / a$$
5. Obliczyć przyspieszenie ziemskie g oraz błąd Δg z zależności
$$T = 2\pi \sqrt{l / g}$$
6. Porównać wynik z wartością tablicową.

Regresja liniowa

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{n[xy] - [x][y]}{n[x^2] - [x]^2}$$

n - ilość punktów

$$[x] = \sum x_i ;$$

$$b = \frac{[y] - a[x]}{n} = \frac{[y][x^2] - [x][xy]}{n[x^2] - [x]^2}$$

$$S_a^2 = \frac{[(y - a - bx)^2]}{n - 2} \cdot \frac{n}{n[x^2] - [x]^2} = \frac{n([y^2] - a[xy] - b[y])}{(n - 2)(n[x^2] - [x]^2)}$$

$$S_b^2 = \frac{[(y - a - bx)^2]}{n - 2} \cdot \frac{[x^2]}{n[x^2] - [x]^2}$$

Dowolne zagadnienie drgań mechanicznych o małych amplitudach w przestrzeni trójwymiarowej sprowadza się do odpowiedniej kombinacji prostych oscylatorów harmoniczných. Drgające struny albo membrany, drgania akustyczne, drgania elektryczne we wnękach rezonansowych czy też drgania atomów w sieciach krystalicznych, można opisać za pomocą tego samego aparatu matematycznego co układ oscylatorów harmoniczných.

Przy pomocy analogii metody rozwiązywania zadań opracowane dla jednych działów możemy z powodzeniem stosować w innych działach.

15-3. Ruch harmoniczny prosty

Rozwiążmy równanie ruchu prostego oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (15-6)$$

$$\ddot{x} = m a = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ddot{r} = m a = m \frac{d^2r}{dt^2}$$

Przypominamy, że każdy układ o masie m , na który działa siła $\ddot{r} = -kr$, podlega temu równaniu. W przypadku sprężyny współczynnik proporcjonalności k jest wielkością stałą i określa on sztywność sprężyny. W innych układach drgających może on określać inne cechy fizyczne układu, jak to zobaczymy później. Jednak sprężyna będzie naszym prototypem oscylatora.

Równanie (15-6) jest równaniem różniczkowym. Jest to związek między funkcją czasu $x(t)$ i jej drugą pochodną względem czasu d^2x/dt^2 . Aby znaleźć położenie cząstki jako funkcję czasu, musimy znaleźć funkcję $x(t)$, która ten związek spełnia.

Równanie (15-6) przepisujemy w postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (15-7)$$

Rozwiązaniem tego równania musi być pewna funkcja $x(t)$, której druga pochodna równa się jej samej ze znakiem przeciwnym i ze stałym współczynnikiem k/m . Z rachunku różniczkowego wiemy, że taką własność mają funkcje sinus i cosinus*. Na przykład

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\frac{d}{dt} \sin t = -\cos t.$$

* Ruch harmoniczny jest nie tylko okresowy, lecz także ograniczony. Tylko funkcje sinus i cosinus albo ich kombinacja mają obydwie te właściwości.

Właściwość ta zostaje zachowana, jeżeli funkcję tę pomnożymy przez stały czynnik A . Biorąc pod uwagę, że funkcja sinus ma wymagane właściwości i że równanie (15-7) zawiera stały czynnik, napiszemy rozwiązanie próbne w postaci

$$x = A \cos(\omega t + \delta). \quad (15-8)$$

Ponieważ

$$\cos(\omega t + \delta) = \cos \delta \cos \omega t - \sin \delta \sin \omega t = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

stała δ pozwala nam otrzymać rozwiązanie zawierające dowolne kombinacje funkcji sinus i cosinus. W wyniku tego równanie (15-8) z nieznanymi (jeszcze) stałymi A , ω i δ jest najbardziej ogólnym rozwiązaniem równania (15-7). Aby określić stałe w rozwiązaniu ogólnym (15-8) i uzyskać pełne rozwiązanie równania (15-7), różniczkujemy dwukrotnie względem czasu równanie (15-8). Otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

oraz

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta).$$

Po podstawieniu tego do równania (15-7) otrzymujemy

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \delta).$$

Jeżeli zatem przyjmimy, że

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (15-9)$$

to

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

jest rozwiązaniem równania oscylatora harmonicznego prostego.

Stale A i δ pozostają w dalszym ciągu nieokreślone i mogą przyjmować zupełnie dowolne wartości. Znaczy to, że funkcja x z dowolnie wybranymi A i δ spełnia równanie (15-7), co fizycznie odpowiada wielkiej różnorodności możliwych ruchów oscylatora. Jest to charakterystyczna właściwość różniczkowego równania ruchu, które nie opisuje jednego szczególnego ruchu, lecz klasę albo całą rodzinę ruchów mających pewne cechy wspólne, a różniących się tylko pod pewnymi względami. W tym przypadku ω jest wspólne dla danej grupy ruchów drgających, a δ i A mogą różnić się między sobą. Zobaczmy później, że A i δ określamy dla danego szczególnego ruchu z warunków, w jakich ten ruch się rozpoczął.

(ciało w punkcie $x = A$),

$$E = K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,5}{9,81} \cdot 0,51 \text{ kGm} = 0,020 \text{ kGm}$$

(ciało w punkcie $x = 0$).

- (i) Napisz równanie ruchu ciała.
Ogólne równanie ma postać

$$x = A \cos(\omega t + \delta).$$

Wiemy już, że $A = 0,04$ m. Należy jeszcze określić ω i δ . Otrzymujemy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,49} = 13 \text{ rad/s}.$$

Po wstawieniu do ogólnego równania:

$$x = 0,04 \cos(13t + \delta).$$

W chwili $t = 0$, $x = 0,04$ m, zatem

$$x = 0,04 \cos \delta = 0,04,$$

a stąd

$$\delta = 0 \text{ rad}.$$

Ostateczne równanie ruchu ma postać

$$x = 0,04 \cos 13t.$$

Jest to równanie ruchu naszego ciała przy założeniu, że x jest mierzone w metrach, t — w sekundach, a kąt $13t$ — w radianach.

15-5. Zastosowanie ruchu harmonicznego prostego

Przytoczymy tu kilka przykładów układów fizycznych znajdujących się w ruchu harmonicznym prostym. Z innymi układami będziemy się spotykali od czasu do czasu w dalszych partiach podręcznika.

Wahadło proste. Wahadło proste jest to wyidealizowane ciało o masie punktovej, zawieszone na cienkiej, nierozciągliwej nici. Kiedy ciało wytrącimy z równowagi, zaczyna się ono wahać w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości. Jest to ruch okresowy. Znajdziemy okres tego ruchu.

Rysunek 15-10 przedstawia wahadło o długości l i masie m , odchylone od pionu o kąt θ . Na masę m działa siła przyciągania grawitacyjnego mg i naprężenie nici T . Jako osie współrzędnych przyjmujemy styczną do łuku i przedłużenie promienia. Siłę ciężkości mg rozkładamy na składową radialną $mg \cos \theta$ i składową styczną $mg \sin \theta$. Składowa radialna dostarcza niezbędne przyspieszenia dośrodkowego do utrzymania ruchu po łuku okręgu. Składowa

styczna jest siłą przywracającą równowagę układu i sprowadza masę m do położenia równowagi. Siła ta wynosi

$$F = -mg \sin \theta.$$

Podkreślamy, że siła F nie jest proporcjonalna do przemieszczenia katowego θ , lecz do $\sin \theta$. Zatem ruch nie jest prostym ruchem harmonicznym. Jeżeli kąt θ jest mały, to $\sin \theta$ jest bardzo blisko θ mierzonemu w radianach*. Przemieszczenie wzdłuż łuku wynosi $x = l\theta$ i dla małych kątów ruch jest w przybliżeniu prostoliniowy. Przyjmując przeto, że

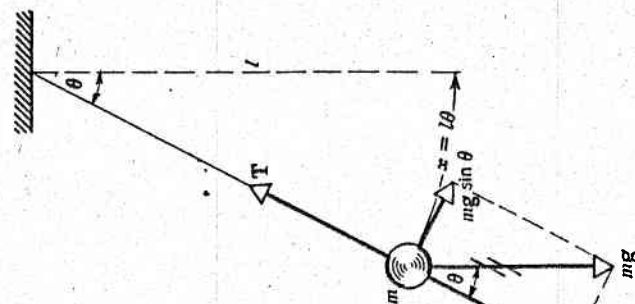
$$\sin \theta \cong \theta,$$

otrzymujemy

$$F = -mg\theta = -mg \frac{x}{l} = -\underbrace{\frac{mg}{l}}_k x.$$

$$F = -kx$$

Rys. 15-10. Siły działające na wahadło proste: naprężenie nici T i ciężar mg masy m . Wartości składowej stycznej i radialnej siły mg są zaznaczone



Zatem dla małych przemieszczeń siła F jest proporcjonalna do przemieszczenia ze znakiem przeciwnym. Jest to właśnie wymagane kryterium dla prostego ruchu harmonicznego. Stała mg/l określa stałą k w równaniu $F = -kx$. Należy porównać wymiar k i mg/l . Przy małej amplitudzie okres wahadła prostego

* Na przykład:

		Różnica w %
$\theta = 0^\circ = 0,0000 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0000$	0
$\theta = 2^\circ = 0,0349 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0349$	0,00
$\theta = 5^\circ = 0,0873 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,0872$	0,11
$\theta = 10^\circ = 0,1745 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,1736$	0,51
$\theta = 15^\circ = 0,2618 \text{ rad}$	$\sin \theta = 0,2588$	1,14